Roland Pichler pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Aufgaben Cluster 3
Harmonische Schwingung

Harmonische Schwingung

Aufgabennummer: B-C3_03

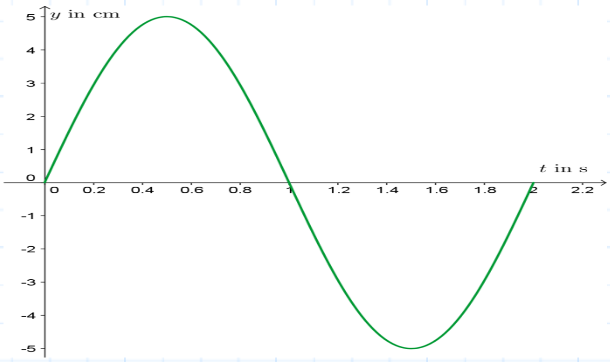
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt allgemein die harmonische Schwingung eines mathematischen Pendels.

A ... Amplitude in Metern (m)
T ... Zeitdauer in Sekunden (s), die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt
φ ... Phasenwinkel im Bogenmaß (rad)
$y(t)$ ... Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t in Metern (m)
ω ... Kreisfrequenz (s^{-1}), $\omega = \frac{2\pi}{T}$

a) - Ermitteln Sie die Funktion für die Geschwindigkeit v des harmonisch schwingenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t.
- Bestimmen Sie daraus allgemein den Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den ersten Umkehrpunkt erreicht.

b) Der zeitliche Verlauf der Auslenkung einer vollen Schwingung eines harmonisch schwingenden Pendels ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.
- Interpretieren Sie den Funktionsgraphen in Bezug auf die Auslenkung und die Geschwindigkeit des Pendels an den Extremstellen und an den Nullstellen.
- Geben Sie jeweils die ungefähren Zahlenwerte dieser Größen an.



c) - Geben Sie für ein harmonisch schwingendes Pendel mit A = 2 cm, ω = 2 s^{-1} und φ = 0,5 rad die lineare Näherung der Auslenkung zum Zeitpunkt t = 0 s an. Runden Sie die Parameter auf 3 Dezimalstellen.
- Berechnen Sie den relativen Fehler, der sich bei Berechnung der Auslenkung nach t = 0,2 s bei Verwendung dieser Näherung ergibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Lösung zu a) 1. Teil

$$y(t) := A \cdot sin(\boxed{\omega} \cdot t + \varphi)$$

$$v(t) := \frac{d}{dt} y(t) \rightarrow A \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + t \cdot \omega)$$

Lösung zu a) 2. Teil

$$v(t_0) = 0 \xrightarrow{solve, t_0} -\frac{\varphi - \frac{\pi}{2}}{\omega}$$

t_0 ... Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den ersten Umkehrpunkt erreicht. (es gilt _n = 0 in der allgemeinen Lösung)

$$v(t_0) = 0 \xrightarrow[]{\substack{solve, t_0 \\ assume, A>0, \omega>0 \\ fully}} \begin{cases} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi \cdot \_n}{\omega} & \text{if } \_n \in \mathbb{Z} \\ undefined & \text{else} \end{cases}$$

Durch das Schlüsselwort fully werden alle Lösungen (in Abhängigkeit von _n) der goniometrischen Gleichung angeboten.
Durch die Annahme $A > 0$ und $\omega > 0$ wird die allgemeine Lösung übersichtlicher

Lösung zu b) 1. und 2. Teil

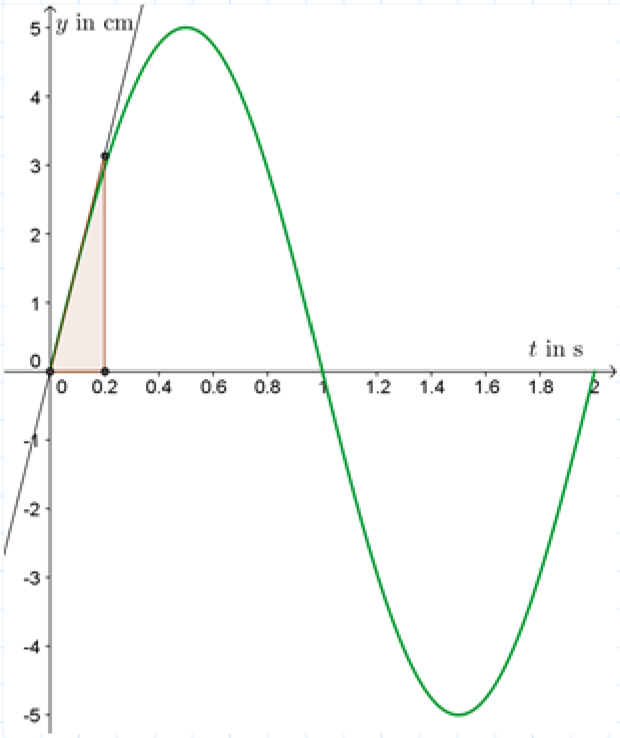
Der Pendelkörper erreicht die Extremstellen mit einer Auslenkung von 5 cm nach 0,5 s und nach 1,5 s. Er ändert an diesen Stellen die Bewegungsrichtung, die momentane Geschwindigkeit ist jeweils null.

An den Nullstellen bei *t* = 0 s, 1 s und 2 s beträgt die Auslenkung null. Der Pendelkörper erreicht an diesen Stellen jeweils die größte Geschwindigkeit.

Die Größe der Geschwindigkeit entspricht dem Anstieg der Kurve in den Nullstellen.
Der Anstieg der Tangente in *t* = 0 ist ca. 15,7.
(Ablesbar aus der Grafik. Falls jemand mit der 1. Ableitung argumentiert, so ist das nicht verlangt, aber auch richtig!)

Die Geschwindigkeit beträgt zu Beginn sowie nach 2 Sekunden jeweils 15,7 cm/s. Nach 1 Sekunde beträgt die Steigung -15,7. Das bedeutet, dass sich der Pendelkörper mit einer Geschwindigkeit von 15,7 cm/s in Richtung abnehmender *y*-Koordinaten bewegt.

Die Ablesung aus der Grafik kann je nach verwendeter Technologie mit Ungenauigkeiten behaftet sein. Das ist zu tolerieren.



<u>Lösung zu c) 1. Teil</u>

Die lineare Naherung entspricht der Tangente $y_{Tangente}(t) = k \cdot t + d$ an $y(t)$ im Nullpunkt (für ihn gilt: t = 0)

$A := 2\ cm \qquad \omega := 2\ s^{-1} \qquad \varphi := 0.5$

$y(t) := A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \qquad d := y(0\ s) = 0.959\ cm$

$v(t) := \frac{d}{dt} y(t) \rightarrow \frac{4 \cdot cm \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot t}{s} + 0.5\right)}{s} \qquad k := v(0\ s) = 3.51\ \frac{cm}{s}$

$$y_{Tangente}(t) := k \cdot t + d \xrightarrow{float, 3} 0.959 \cdot cm + \frac{3.51 \cdot t \cdot cm}{s}$$

<u>Lösung zu c) 2. Teil</u>

$$RelativerFehler := \left| \frac{y(0.2\ s) - y_{Tangente}(0.2\ s)}{y(0.2\ s)} \right| = 6.022\ 1\%$$